

Глава 2. Тема 3. Занятие 1.

1°. Случай бесконечной области. Если двумерная область D не ограничена и функция $f(x, y)$ непрерывна на D , то полагают:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy,$$

где D_n — любая последовательность ограниченных замкнутых областей, покрывающая область D . Если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности D_n , то соответствующий интеграл называется сходящимся, в противном случае расходящимся.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл от непрерывной функции, распространенной на неограниченную трехмерную область.

2°. Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области D всюду, за исключением точки $P(a, b)$, то полагают:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D \setminus U_\varepsilon} f(x, y) dx dy,$$

где U_ε есть область диаметра ε , содержащая точку P , и в случае существования предела рассматриваемый интеграл называют сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Предполагая, что вблизи точки $P(a, b)$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^\alpha},$$

$$\text{где } 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M < +\infty \text{ и } r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

получим, что при $\alpha < 2$ интеграл сходится, при $\alpha \geq 2$ — расходител.

Аналогично определяется несобственный интеграл, если функция $f(x, y)$ имеет линию разрыва.

Понятие несобственного интеграла от разрывной функции легко переносится на случай тройных интегралов.

N 4161, 4162, 4171, 4176, 4182, 4187, 4191, 4192, 4196

N 4161 Исследовать на сходимость интеграл $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$,
где $0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M < +\infty$.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 1 \leq r < +\infty \end{cases} \Rightarrow \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{r^{2p-1}} dr$$

при каждом $\varphi \in [0; 2\pi]$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{r^{2p-1}} dr$ сходится
если $2p-1 > 1 \Rightarrow p > 1$.

N 4162 Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$.

Для всех $|x|, |y| \in [1; +\infty)$:

$$\frac{1}{4|x|^p|y|^q} \leq \frac{1}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \leq \frac{1}{|x|^p|y|^q}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx dy}{|x|^p|y|^q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{|x|^p} \int_1^{+\infty} \frac{dy}{|y|^q}$ сходится, если

$p > 1$ и $q > 1$.

N 4171. Вычислить интеграл $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-\varepsilon} \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{1-r^2} \Big|_0^{1-\varepsilon} = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{1 - \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}\} = 2\pi.$$

N 4176 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \cos r^2 dr = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A r e^{-r^2} \cos r^2 dr = 2\pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A r e^{-r^2} \cos r^2 dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-w}}{2} (\cos w + \sin w) dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A^2}^0 e^{-w} \cos w dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{A^2} e^{-w} \cos w dw =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-w}}{2} (\cos w + \sin w) \Big|_{-A^2}^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

№4182 Исследовать на сходимость интеграл $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy$,
где $0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M < +\infty$.

$$\begin{cases} x = r \cos \psi \\ y = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 \frac{r \varphi(r \cos \psi, r \sin \psi)}{(r^2 + r^2 \cos \psi \sin \psi)^p} dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1 + \cos \psi \sin \psi)^p} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(r \cos \psi, r \sin \psi)}{r^{2p-1}} dr$$

Интеграл $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(r \cos \psi, r \sin \psi)}{r^{2p-1}} dr$ сходится при $2p-1 < 1 \Rightarrow p < 1$.

№4187 Вычислить интеграл $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \left| \begin{matrix} x = r \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = r \sin \varphi, & 0 \leq r \leq 1 \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr =$$

$$= -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 r \ln r dr = (*)$$

$$- \int_{\varepsilon}^1 r \ln r dr = \int_{\ln \varepsilon}^0 w \ln e^w dw = \int_0^{\ln \varepsilon} w e^{2w} dw =$$

$$= \frac{1}{2} w e^{2w} \Big|_0^{\ln \varepsilon} - \frac{1}{2} \int_0^{\ln \varepsilon} e^{2w} dw = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(*) = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \frac{1}{4} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

№4192 Исследовать на сходимость интеграл $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$,
где $0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M < +\infty$.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \psi \\ y = r \sin \theta \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r < +\infty \end{cases} \Rightarrow \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(r\cos\theta\cos\psi, r\sin\theta\cos\psi, r\sin\psi)}{r^{2p-2}} dr$$

При фиксированных $(\theta, \psi) \in [0; 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(r\cos\theta\cos\psi, r\sin\theta\cos\psi, r\sin\psi)}{r^{2p-2}} dr$ сходится при $2p-2 > 1 \Rightarrow p > \frac{3}{2}$.

N4192 Исследовать на сходимость интеграл $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$, где $0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M < +\infty$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\psi \\ y = r\sin\theta\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{\varphi(r\cos\theta\cos\psi, r\sin\theta\cos\psi, r\sin\psi)}{r^{2p-2}} dr$$

При фиксированных $(\theta, \psi) \in [0; 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ интеграл $\int_0^1 \frac{\varphi(r\cos\theta\cos\psi, r\sin\theta\cos\psi, r\sin\psi)}{r^{2p-2}} dr$ сходится при $2p-2 < 1 \Rightarrow p < \frac{3}{2}$.

N4196 Вычислить интеграл $\iiint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1} \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^p} \cdot \int_{\varepsilon}^1 \frac{dy}{y^q} \cdot \int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{z^r} = (*)$$

Интегралы $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^p}$, $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dy}{y^q}$, $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{z^r}$ сходятся при $p, q, r < 1 \Rightarrow$

$$(*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\varepsilon}^1 \cdot \frac{y^{1-q}}{1-q} \Big|_{\varepsilon}^1 \cdot \frac{z^{1-r}}{1-r} \Big|_{\varepsilon}^1 = (1-p)^{-1} (1-q)^{-1} (1-r)^{-1}.$$

Задание: №№ 4164, 4165, 4170, 4177, 4181, 4190, 4193, 4197.

№4170 Вычислите интеграл $\iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}$

$$\iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p} = \left/ \begin{array}{l} u=x, \quad x=u \\ v=x+y, \quad y=-u+v, \end{array} \right. I=1 \left/ = \int_0^1 du \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^p} = (*)$$

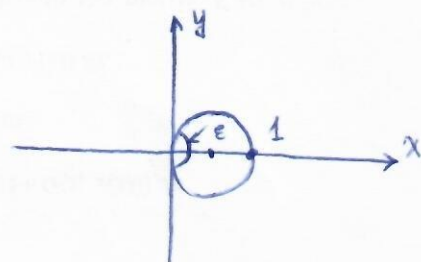
Значит интеграл сходится при $p > 1$. Тогда $(*) = \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^p} =$
 $= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dv}{v^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{v^{1-p}}{1-p} \Big|_1^A = \frac{1}{p-1}.$

№4177. Вычислите интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy &= \left/ \begin{array}{l} x=r \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y=r \sin \varphi, \quad 0 \leq r < +\infty \end{array} \right/ = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \sin r^2 dr = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^A r e^{-r^2} \sin r^2 dr = \left/ w=r^2 \right/ = \\ &= \pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{A^2} e^{-w} \sin w dw = -\pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A^2}^0 e^w \sin w dw = \\ &= -\pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^w}{2} (\sin w - \cos w) \Big|_{-A^2}^0 = \pi \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^w}{2} (\cos w - \sin w) \Big|_{-A^2}^0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

№4190 Вычислите интеграл $\iint_{x^2+y^2 \leq x} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq x} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \left/ \begin{array}{l} x=r \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ y=r \sin \varphi, \quad 0 \leq r \leq \cos \varphi \end{array} \right/ = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\varepsilon}^{\cos \varphi} \frac{r dr}{r} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi - \varepsilon) d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2 - \pi \varepsilon) = 2. \end{aligned}$$

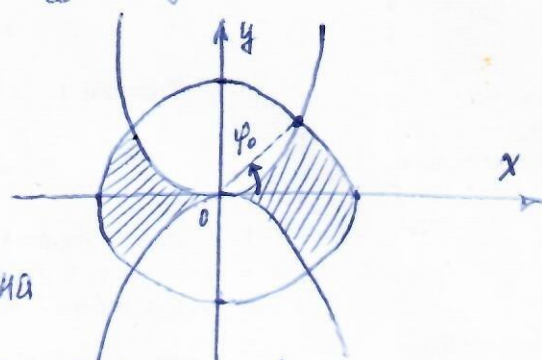


№4197 Вычислите интеграл $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

$$\begin{aligned} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3} &= \left/ \begin{array}{l} x=r \cos \varphi \cos \psi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y=r \sin \varphi \cos \psi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ z=r \sin \psi, \quad 1 \leq r < +\infty \end{array} \right/ = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_1^A \frac{dr}{r^4} = \\ &= 4\pi \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3r^3} \Big|_1^A = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

N4181 Исследовать на сходимость интеграл $\iint_D \frac{dx dy}{x^2+y^2}$, где D определяется условиями $|y| \leq x^2$, $x^2+y^2 \leq 1$.

$$\left. \begin{aligned} x^2+y^2=1 \\ y=x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2+y-1=0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

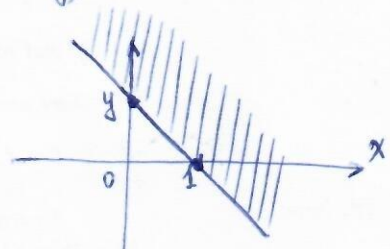


Сходимость интеграла $\iint_D \frac{dx dy}{x^2+y^2}$ эквивалентна
сходимости интеграла $\iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1 \\ y \leq x^2}} \frac{dx dy}{x^2+y^2} = \int_0^{\varphi_0} \int_{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^1 \frac{r dr d\varphi}{r^2} = \int_0^{\varphi_0} \ln \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\varphi_0} \ln \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\varepsilon}^{\varphi_0} \ln(\sin \varphi) d\varphi - 2 \int_{\varepsilon}^{\varphi_0} \ln(\cos \varphi) d\varphi \right).$

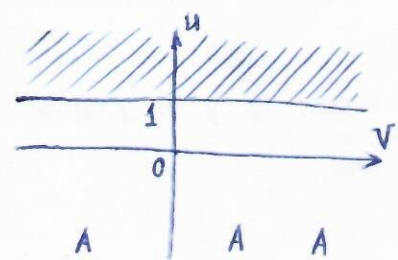
$0 < \cos \varphi \leq \cos \varphi \leq 1 \Rightarrow \ln(\cos \varphi)$ - непрерывная функция на $[0, \varphi_0]$ $\Rightarrow$ второй интеграл - собственный.
Для первого интеграла применим интегрирование по частям: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\varphi_0} \ln(\sin \varphi) d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln(\sin \varphi) \cdot \varphi - \int_{\varepsilon}^{\varphi_0} \varphi \cdot \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi \right)$. Функция $\varphi / \sin \varphi$ - непрерывная на $[0, \varphi_0]$ $\Rightarrow$ второй интеграл собственный $\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln(\sin \varphi) \cdot \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \varepsilon \cdot \varphi = 0 \Rightarrow$ интеграл сходится.

N4165 Исследовать на сходимость интеграл $\iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = -x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(u+v) \\ x = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \Rightarrow J = \frac{1}{2} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} 1 \leq u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \end{cases} \Rightarrow \iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy =$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A dv \int_1^A \frac{\sin \frac{u-v}{2} \sin \frac{u+v}{2}}{u^p} du = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A dv \int_1^A \frac{\cos v - \cos u}{u^p} du = \frac{1}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{-A}^A \cos v dv \int_1^A \frac{du}{u^p} - \int_{-A}^A dv \int_1^A \frac{\cos u}{u^p} du \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \sin A \int_1^A \frac{du}{u^p} - A \int_1^A \frac{\cos u}{u^p} du \right\} \end{aligned}$$

$A = \pi n!$ расхожде при $p > 1$!

Пусть $p > 1$, тогда несобственные интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^p} du$ сходятся. Это означает, что при $A \rightarrow +\infty$ выражение в скобках стремится к ∞ из-за первого множителя второго слагаемого.

№4164. Исследовать на сходимость интеграл $\iint \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p, q > 0)$.

Сходимость интеграла $\iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ эквивалентна сходимости интеграла

$$I = \iint_{\mathcal{L}} \frac{dx dy}{x^p + y^q}, \quad \mathcal{L} = \{(x, y) : x^p + y^q \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\begin{cases} x = r^{\frac{1}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \\ y = r^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r < +\infty \end{cases} \Rightarrow I = \frac{2}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi \int_1^{+\infty} r^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2} dr$$

Интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi$ ~~сходится~~ ^{сходится} по формуле интеграл I сходится, если сходится интеграл $\int_1^{+\infty} r^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2} dr$. Он сходится, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

№4193 Исследовать на сходимость интеграл $\iiint \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p, q, r > 0)$.

Сходимость интеграла $\iiint_{|x|+|y|+|z| \geq 1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$ эквивалентна сходимости интеграла

$$I = \iiint_{\mathcal{L}} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}, \quad \mathcal{L} = \{(x, y, z) : x^p + y^q + z^r \geq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

$$\begin{cases} x = \rho^{\frac{1}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \cos^{\frac{2}{r}} \psi \\ y = \rho^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \cos^{\frac{2}{r}} \psi \\ z = \rho^{\frac{1}{r}} \sin^{\frac{2}{r}} \psi \end{cases}, \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq \rho < +\infty \end{cases} \Rightarrow$$

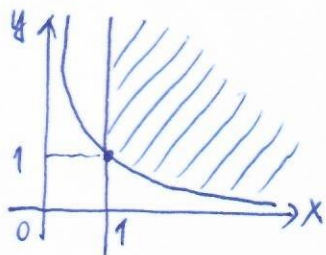
$$I = \frac{32}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{r}-1} \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{q}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi \int_1^{+\infty} \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2} d\rho.$$

Интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{r}-1} \varphi d\varphi$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{q}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi$ конечны. Поэтому

интеграл I сходится, если сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2} d\rho$. Он сходится, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Несобственные интегралы

№ 4169 Вычислить $\iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = (*)$



$$\left. \begin{matrix} u = x \\ v = xy \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u \geq 1 \\ v \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

$$(*) = \int_1^{+\infty} du \int_1^{+\infty} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u^{p-q} \cdot v^q} dv = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{p-q+1}} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^q} = (*)$$

Интегралы сходится при $\left. \begin{matrix} p-q+1 > 1 \\ q > 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p > q > 1.$

Иначе исходный интеграл расходится.

Имеем $(*) = \frac{u^{q-p}}{q-p} \Big|_1^{+\infty} \cdot \frac{v^{1-q}}{1-q} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{(q-p)(1-q)}$

4163 Исследовать на сходимость

$$\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(xy)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy, \quad 0 < m \leq |\varphi(xy)| \leq M.$$

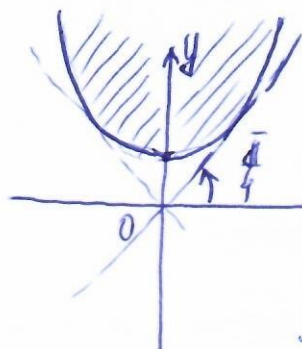
Подынтегральная функция допускает оценку

$$\frac{m}{(1+x^2)^p} \leq \frac{|\varphi(xy)|}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(1+x^2)^p} \quad \forall x, \forall y \in [0, 1]$$

Тогда сходимость исходного интеграла эквивалентна сходимости

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}}, \quad \text{который сходится при } p > \frac{1}{2} \\ \text{и расходится при } p \leq \frac{1}{2}.$$

Nº4173 Барменчук $\iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2} = 2 \iint_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq x^2+1}} \frac{dx dy}{x^4+y^2} = (*)$



Замени переменных:

$$x = r^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi, y = r \sin \varphi$$

$$x'_r = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi, x'_\varphi = -\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \varphi \sin \varphi$$

$$y'_r = \sin \varphi, y'_\varphi = r \cos \varphi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sin \varphi - \cos \varphi} \leq r < +\infty$$

$$I = \left| \frac{\frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \varphi \sin \varphi}{r \cos \varphi} \right| = \frac{\sqrt{r}}{2 \sqrt{\cos \varphi}}$$

$$(*) = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi - \cos \varphi}}^{+\infty} \frac{\sqrt{r}}{2 \sqrt{\cos \varphi} \cdot r^2} dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} \int_{r(\varphi)}^{+\infty} r^{-\frac{3}{2}} dr = -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}} r^{-\frac{1}{2}} \Big|_{r(\varphi)}^{+\infty}$$

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{r(\varphi) \sqrt{\cos \varphi}} = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan \varphi - 1} d\varphi = \left| t = \sqrt{\tan \varphi - 1}, \varphi = \arctg(t+1), d\varphi = \frac{2t dt}{1+(t^2+1)^2} \right| =$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+2t^2+2} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\alpha} \cdot \frac{t^2+2t+\beta - t^2-2t-\beta}{(t^2+2t+\beta)(t^2-2t+\beta)} dt =$$

$$t^4+2t^2+2 = (t^2+2t+\beta)(t^2-2t+\beta), \text{ где } \alpha = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}, \beta = \sqrt{2}.$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^2-2t+\beta} - \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{t^2+2t+\beta} \right\} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(2t-2) dt}{t^2-2t+\beta} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-2t+\beta} -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{(2t+2) dt}{t^2+2t+\beta} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+\beta} = \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{t^2-2t+\beta}{t^2+2t+\beta} \right| \Big|_0^{+\infty} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\underbrace{t - \frac{\mathcal{L}}{2}}_{\xi}\right)^2 + \underbrace{\left(\beta - \frac{\mathcal{L}^2}{4}\right)}_{a^2}} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\underbrace{t + \frac{\mathcal{L}}{2}}_{\eta}\right)^2 + \underbrace{\left(\beta - \frac{\mathcal{L}^2}{4}\right)}_{a^2}} = \int_{-\frac{\mathcal{L}}{2}}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + a^2} + \int_{\frac{\mathcal{L}}{2}}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2 + a^2} = \\
& = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{a} \Big|_{-\frac{\mathcal{L}}{2}}^{+\infty} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{a} \Big|_{\frac{\mathcal{L}}{2}}^{+\infty} = \frac{1}{a} \left\{ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\mathcal{L}}{2a} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\mathcal{L}}{2a} \right\} \\
& = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta - \frac{\mathcal{L}^2}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{12 - \frac{12-1}{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{12+1}} = \underline{\underline{\pi\sqrt{(12-1) \cdot 2}}}.
\end{aligned}$$